

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$ .

1.
  - Pour  $n = 0$  on a :  $u_1 = u_{0+1} = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$
  - Pour  $n = 1$  on a :  $u_2 = u_{1+1} = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$
2. Soit  $n$  un entier naturel. On complète la fonction suite\_u d'argument n ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de  $u_n$ .

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(1,n+1) :
        |   u = 5*u - 8*(i-1) + 6
    return u
```

Rem : il aurait sans doute été plus simple de donner comme algorithme :

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(0,n) :
        |   u = 5*u - 8*i + 6
    return u
```

3. a. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n \geq 2n$ .

- **Initialisation**

Pour  $n = 0$ , on a :  $u_0 = 0$  et  $2n = 0$ ; donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

- **Hérédité**

On suppose que  $u_n \geq 2n$  pour  $n \geq 0$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \geq 5 \times (2n) - 8n + 6 = 2n + 6 = 2(n+1) + 4 \geq 2(n+1)$$

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vérifiée.

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout  $n \geq 0$ , donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq 2n$ .

- b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$  et  $u_n \geq 2n$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

- c. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  donc, d'après la définition de la limite vers  $+\infty$  d'une suite, pour tout réel  $A > 0$ , il existe un rang  $n_0$  à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à  $A$ ; donc il existe un rang  $n_0$  tel que si  $n \geq n_0$ , alors  $u_{n_0} \geq 10^p$ .

4. Pour tout  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$ ; or  $u_n \geq 2n$  donc  $4u_n - 8n \geq 0$  et donc  $u_{n+1} - u_n \geq 6$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

5. On considère la suite  $(v_n)$ , définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n - 2n + 1$ .

- a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):  
    L = []  
    for i in range(n+1) :  
        L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)  
    return L
```

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)  
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

On peut conjecturer que, pour tout  $n$ , on a :  $v_{n+1} = 5v_n$ .

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1) \\ &= 5v_n\end{aligned}$$

- b. On déduit de la question précédente que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 5$ , et de premier terme  $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$ .

On a donc, pour tout  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = 5^n$ .

Pour tout  $n$ ,  $v_n = u_n - 2n + 1$  donc  $u_n = v_n + 2n - 1$  et donc  $u_n = 5^n + 2n - 1$ .